بخش دوم:
مبانی تئوری احتمالات

1

" احتمال" :

- مقیاس سنجش کمّی برای بیان شانس وقوع رخدادها
- عددی بین صفر و یک
  - صفر: عدم وقوع قطعی
  - یک: وقوع قطعی
- احتمال وقوع پیشامد S در صورت رخ دادن تعدادی پیشامد: $P(s)=\frac{n(s)}{n(s)+n(\bar{s})}$

مثال ۱: احتمال آمدن ۵ در پرتاب یک تاس:

مثال ۲: احتمال ۸ بودن مجموع نتیجه دو تاس:

2

- در سیستم های بزرگ با تعداد حالت های زیاد، برای محاسبه تعداد حالت ها از مفهوم ترتیب و یا ترکیب استفاده می شود.

- ترتیبات (permutations)
  - تعداد ترتیبات r از n یعنی تعداد حالت های ممکن برای انتخاب r عضو از میان n عضو با توجه به ترتیب انتخاب:

$$_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ۳: به چند طریق می توان ۳ توپ از میان ۷ توپ رنگی متفاوت را انتخاب کرد و در کنار هم آرایش داد؟

3

- سه شرط لازم برای استفاده از ترتیبات
  - متفاوت بودن کلیه عضوها (ترتیب آنها مهم باشد)
  - عدم وجود محدودیت برای آرایش دهی
  - عدم استفاده از هر عنصر بیش از یک بار

مثال ۴: چند عدد ۳ رقمی توسط ارقام ۰ تا ۶ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

- اگر n عضو شامل چند دسته داشته باشیم و هر دسته به ترتیب r_1 و r_2 و ... و r_k عضو یکسان داشته باشند ($r_1+r_2+\ldots+r_k=n$)، در اینصورت تعداد ترتیب ها برابر است با:

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$$

مثال ۵: تعداد آرایش های مختلف از یک ردیف ۱۲ تایی از گلوله های رنگی که ۳ تای آنها آبی، ۲ تای آنها قرمز و ۷ تا سبز باشند:

4

- ترکیبات (Combinations): تعداد انتخابها بدون توجه به نحوه آرایش (ترتیب) عناصر

$$_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال ۶: تعداد حالتهای انتخاب ۳ توپ از میان ۷ توپ متفاوت، بدون توجه به نحوه چینش:

$$_{7}C_{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$$

مثال ۷: الف) تعداد حالت های انتخاب ۵ توپ از بین ۶ توپ سفید و ۵ توپ سیاه به طوری که ۲ توپ سفید باشد:

ب) تعداد حالت های انتخاب ۵ توپ از بین ۶ توپ سفید و ۵ توپ سیاه به طوری که حداکثر ۲ توپ سفید باشد:

5

- با افزایش r، تعداد ترتیب ها زیاد می شود.
- با افزایش r، تعداد ترکیب ها ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد.
- در کاربرد های مهندسی ترکیب اهمیت بیشتری دارد.
- احتمال وقوع پیشامد موردنظر با تعیین تعداد حالت ها (ترکیب ها) تعیین می شود.

مثال ۸: ۲۰ توپ شامل ۸ توپ سیاه و ۱۲ توپ سفید داریم. ۴ توپ انتخاب می کنیم. احتمال آنکه:
الف) همه توپ ها سیاه باشند:

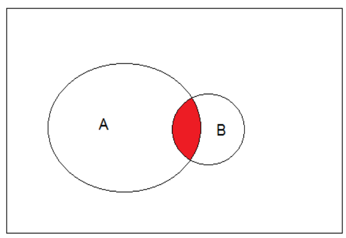
ب) همه توپ ها یک رنگ باشند:

ج) همه توپ ها سیاه باشند مشروط بر آنکه توپ ها هربار به جعبه بازگردانده شود:

6

تقسیم بندی رویدادها

- رویدادهای مستقل: وقوع یکی بر وقوع دیگری تأثیر ندارد: $P(A\cap B)=P(A).P(B)$
- رویدادهای ناسازگار: عدم امکان وقوع همزمان: $P(A\cap B)=0$
- رویدادهای مکمل: وقوع حتمی یکی در صورت عدم وقوع دیگری: $P(A)+P(B)=1$
- رویدادهای شرطی: $P(A\,|\,B)=P(A\cap B)\,/\,P(B)$, $P(B\,|\,A)=P(B\cap A)\,/\,P(A)$



7

مثال ۹: دو قطعه A و B با احتمال سالم بودن به ترتیب برابر با ۰/۹ و ۰/۸ داریم.

الف: احتمال آنکه هردو سالم باشند:

ب: احتمال آنکه حداقل یکی سالم باشد:

ج: احتمال آنکه فقط یکی سالم باشد:

8

- قضیه بیز: اگر تعدادی حوادث ناسازگار، مجموعه کل حوادث را تشکیل دهند:

$$P(A \cap B_i) = P(A|B_i).P(B_i)$$
$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B_1) \cup P(A \cap B_2) \ldots \cup P(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i).P(B_i)$$

- کاربرد قانون بیز در ارزیابی قابلیت اطمینان:

P(شکست سیستم) = P(شکست سیستم | B سالم بودن).P(B سالم بودن)
+ P(شکست سیستم | B خراب بودن).P(B خراب بودن)

مثال۱۰: سیستمی شامل دو عنصر A و B با احتمال سالم بودن ۰/۹ و ۰/۸ است. اگر هردو عنصر از کار بیافتند سیستم با شکست مواجه می شود. احتمال شکست سیستم چقدر است؟

$$P(f)=P(f|B_s).P(B_s)+P(f|B_f).P(B_f)$$
$$= 0\times0.8+P(A_f).P(B_f)=0.1\times0.2=0.02$$

9

مثال۱۱: یک محصول معین توسط دو کارخانه تولید می شود. کارخانه ۱، ۷۰٪ محصول را تولید می کند و احتمال سالم بودن محصول آن ۹۰٪ است. کارخانه ۲، ۳۰٪ محصول را تولید می کند و احتمال سالم بودن محصول آن ۸۰٪ است.

الف) احتمال آنکه محصول سالم باشد؟

ب) احتمال آنکه یک محصول سالم، مربوط به تولید کارخانه ۲ باشد؟

10

مثال: دو ظرف A و B شامل توپ‌های رنگی به صورت زیر داریم:

ظرف	تعداد توپ سیاه	تعداد توپ سفید	تعداد توپ سبز
A	۵	۴	۱
B	۴	۶	۰

الف: سه توپ از ظرف B انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه از میان توپ‌های انتخاب شده، حداقل دو توپ سفید باشند چقدر است؟

ب: یک توپ از ظرف A به ظرف B منتقل کرده و سپس از ظرف B یک توپ انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه توپ انتخاب شده از ظرف B سفید چقدر است؟

ج: اگر توپ انتخاب شده از ظرف B (در قسمت قبل) سفید باشد احتمال آنکه توپ انتخابی بعدی از ظرف B، باز هم سفید باشد چقدر است؟ (توپ انتخاب شده‌ی اول به ظرف B بازگردانده نمی شود)

11