بخش سوم:
متغیر تصادفی و توابع توزیع احتمال

1

توزیع احتمال (Probability Distribution)

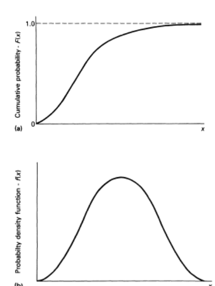
- متغیر تصادفی (Random Variable): پارامتری است از یک پدیده تصادفی که قابل سنجش است ولی مقدار آن به صورت تصادفی خواهد بود.
  - **متغیر تصادفی گسسته**: تعداد حالت ها مشخص (پرتاب سکه، وضعیت واحد تولیدی)
  - **متغیر تصادفی پیوسته**: دارای بینهایت مقدار ممکن (مقدار بار در سیستم قدرت، سرعت باد، ...)

- تحلیل اطلاعات مربوط به متغیر تصادفی با دو تابع زیر انجام می شود:
  - تابع توزیع احتمال (تجمعی) یا (cumulative) probability distribution function : احتمال آنکه مقدار متغیر تصادفی کوچکتر یا مساوی x باشد. ((F(x)
  - تابع چگالی (جرم) احتمال (Probability density/mass function) یا f(x)

$$F(x_1) = P(x \leq x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$$

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



2

- امید ریاضی یا مقدار انتظاری (Expected Value)

مقادیر نمونه برداری شده‌ی یک متغیر تصادفی می تواند متفاوت باشند اما اگر به تعداد زیاد تکرار شود یک میانگین خواهد داشت.

برای متغیر تصادفی گسسته: $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

برای متغیر تصادفی پیوسته: $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

مثال۱: مقدار مورد انتظار در پرتاب یک تاس

$$E(x) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5$$

مثال۲: مقدار مورد انتظارِ مجموع دو تاس

$$E(x) = (1+1) \times \frac{1}{36} + (1+2) \times \frac{1}{36} \cdots + (6+6) \times \frac{1}{36} = 7$$

و یا برای پیشامدهای مستقل:

$$E(x+y) = E(x) + E(y) = 3.5 + 3.5 = 7$$

3

مثال۳: مقدار بیمه یک دستگاه ۱۰۰۰ دلار و حق بیمه آن ۲۰ دلار (۲٪) است. اگر احتمال خراب شدن دستگاه ۰/۰۱ باشد، سود مورد انتظار شرکت بیمه چقدر خواهد بود؟

ب

سوال: به ازای چه مقدار از احتمال خرابی، سود مورد انتظار شرکت بیمه صفر خواهد بود؟

- **واریانس و انحراف استاندارد (Variance and Standard Deviation):**
- امید ریاضی یک متغیر هیچ اطلاعاتی از نحوه پراکندگی مقادیر متغیر تصادفی مورد مطالعه حول مقدار میانگین آن به دست نمی دهد.
- مثال: میانگین و پراکندگی نمرات یک کلاس

کلاس ۱:	۲۰	۱۹	۱۹	۱۷	۱۴	۱۲	۱۲	۱۱	۹	۸	۷
کلاس ۲:	۱۹	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۲	۱۱	۱۱	۱۰	۹

- توصیف چگونگی پراکندگی مقادیر متغیر تصادفی با استفاده از ممان مرکزی k ام:

kth Central moment $\quad M_k = E[(x - E(x))^k]$

4

- ممان دوم یا واریانس:

$$M_2 = Var(x) = E[(x - E(x))^2] \quad = E[x^2 - 2xE(x) + E^2(x)]$$
$$= E(x^2) - E^2(x)$$

- واریانس برای متغیر گسسته:

$$Var(x) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x)]^2 \, p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p_i - E^2(x)$$

- انحراف استاندارد: $\sigma_x = \sqrt{Var(x)}$

5

- انواع توزیع های احتمال مورد استفاده در سیستم های قدرت
- توزیع دو جمله ای (Binomial Distribution)
- توزیع نرمال یا گوسی (Normal Distribution)
- توزیع پواسون (Poisson Distribution)
- توزیع نمایی (Exponential Distribution)
- توزیع ویبال (Weibull Distribution)

توزیع دو جمله ای: توزیع گسسته که برای ارزیابی وضعیت اجزای سیستم که غالباً on یا off هستند به کار می رود و تعداد ترکیبات on و off را نشان می دهد.

$x = \{0\,,1\}$ مقدار متغیر تصادفی

$$p(x) = \begin{cases} p\,, & x = 1 \quad \text{احتمال یک بودن متغیر تصادفی} \\ q\,, & x = 0 \quad \text{احتمال صفر بودن متغیر تصادفی} \end{cases}$$

$$E(x) = p \times 1 + q \times 0 = p$$
$$Var(x) = E(x^2) - E^2(x) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

6

- اگر یک متغیر تصادفی دارای توزیع دوجمله ای باشد تعداد ترکیبات آن را می توان با استفاده از رابطه زیر به دست آورد:

$$(p+q)^n = 1 \quad , \quad n = \text{تعداد آزمایشها}$$

$$\begin{cases} n=1 \;\rightarrow\; p+q=1 \\ n=2 \;\rightarrow\; p^2+2pq+q^2=1 \\ n=3 \;\rightarrow\; p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=1 \\ n=4 \;\rightarrow\; p^4+4p^3q+6p^2q^2+4pq^3+q^4=1 \end{cases}$$

- شرایط استفاده از رابطه بالا (توزیع دوجمله ای برای متغیر تصادفی)
  - تعداد آزمایش ها مشخص باشد
  - در هر آزمایش صرفاً دو نتیجه‌ی ممکن، محتمل باشد.
  - P و q در همه آزمایش ها یکسان و ثابت باشند.
  - کلیه آزمایش ها مستقل از هم باشند (نتیجه هیچکدام بر دیگری تأثیر نگذارد)

- می توان نشان داد که در n آزمایش با متغیر تصادفی با توزیع دوجمله ای، تعداد متوسط وقوع و انحراف استاندارد آن برابر است با :

$$E(x) = np$$
$$Var(x) = npq$$

مثال۴: الف)تعیین مقدار انتظاری و انحراف استاندارد تعداد محصولهای معیوب در یک نمونه برداری ۵ تایی، در صورتی که احتمال سلامت هر محصول ۹۵٪ باشد.

ب: احتمال آنکه در نمونه برداری حداکثر ۲ محصول معیوب باشند چقدر است؟

- ## ارزیابی اقتصادی قابلیت اطمینان

مثال۵: هزینه تولید یک محصول، ۱۰۰۰ تومان و قیمت فروش آن (در صورت سالم بودن و به فروش رسیدن) ۱۵۰۰ تومان است. احتمال معیوب بودن محصول ۰/۰۱ است.

الف: سود مورد انتظار در تولید ۱۰۰۰ محصول چقدر است؟

ب: اگر بتوان با صرف هزینه ۱۰ تومان به ازای هر محصول، قابلیت اطمینان آن را بالا برد و به ۰/۹۹۵ رساند، آیا هزینه صرف شده توجیه اقتصادی دارد؟

سوال: اگر با صرف هزینه های زیر بتوان قابلیت اطمینان محصول تولید شده را افزایش داد، کدام میزان از صرف هزینه، توجیه اقتصادی دارد؟

هزینه صرف شده برای هر محصول	قابلیت اطمینان حاصل شده
۰	۰/۹۹
۲	۰/۹۹۱
۵	۰/۹۹۳
۱۰	۰/۹۹۵
۱۲	۰/۹۹۹

مثال۶: تأثیر استفاده از عنصر مازاد در تحلیل اقتصادی ارزش قابلیت اطمینان

در یک سیستم قدرت، ۴ ترانسفورماتور با ظرفیت ۲۵۰ مگاوات، بار ۷۰۰ مگاواتی را تأمین می کنند و احتمال عملکرد صحیح هر کدام ۰/۹۵ است.

الف: اگر برای کار کردن صحیح مجموعه، وجود حداقل ۳ ترانسفورماتور لازم باشد احتمال عملکرد صحیح مجموعه چقدر است؟

ب: اگر خسارت شکست در عملکرد (قطع هر مگاوات بار) ۱۰۰۰۰ دلار باشد، مقدار انتظاری خسارت چقدر است؟

ج:اگر هزینه خرید هر ترانسفورماتور جدید (مشابه ترانسفورماتورهای قبلی) ۵۰۰۰ دلار باشد آیا اضافه کردن ترانسفورماتور جدید به این مجموعه توجیه اقتصادی دارد؟ (قابلیت اطمینان بهینه چقدر است؟)

9

اگر احتمال خرابی ترانس ها متفاوت باشد احتمال وقوع هر وضعیت، با استفاده از رابطه زیر، تعیین می شود:

$$(p_1 + q_1)(p_2 + q_2) \cdots (p_n + q_n) = 1$$

- ظرفیت های غیرمتناظر:

ابتدا همه حالت ها را در ترکیب با هم بررسی نموده و سپس نتایج مشابه را با هم تجمیع می کنیم (احتمال حالت های یکسان با هم جمع می شوند)

مثال۷: اگر ظرفیت ترانسفورماتورها ۲۰۰ و ۳۰۰ و ۵۰۰ مگاوات با احتمال از کارافتادگی به ترتیب ۰/۱، ۰/۰۵ و ۰/۱ باشد:

10

توزیع احتمال پواسون (توزیع احتمال گسسته)

برای رخدادی که میانگین (نرخ) وقوع آن λ بار بر واحد زمان باشد، احتمال وقوع آن رخداد به تعداد x بار در مدت زمان t برابر است با:

$$p_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

- ثابت می شود که مقدار انتظاری (تعداد متوسط) وقوع متغیر متصادفی با توزیع پواسون برابر است با:

$$E(x)=\lambda t$$

مثال ۸: تعداد متوسط اتوموبیل گذرنده از یک بزرگراه ۱۲۰ اتوموبیل در ساعت است. احتمال عبور تعداد صفر و ۳ اتوموبیل از محل معینی از این بزرگراه در مدت ۳۰ ثانیه چقدر است؟

11

مثال۹: در یک سیستم توزیع، تعداد میانگین وقوع عیب در کابل در هر سال به ازای هر ۱۰۰ کیلومتر از طول کابل برابر با ۰/۵ بار است. مطلوب است تعیین احتمال تعداد (صفر)، (۲) و (۳ و بیشتر) عیب برای ۱۰ کیلومتر از طول کابل در مدت زمان ۴۰ سال.

مثال۱۰: یک تولیدکننده، محصولی را تولید می کند که هزینه ساخت هر واحد آن ۳ دلار و قیمت فروش آن ۱۰ دلار است. اگر محصول در طول سال به فروش نرسد باید معدوم شود. بر اساس تجارب قبلی، نیاز بازار به محصول موردنظر، یک متغیر تصادفی با توزیع پواسون و مقدار مورد انتظار ۳ واحد است. مقدار انتظاری سود تولیدکننده بر اساس تولید سالانه ۵ محصول چقدر است؟

12

تابع توزیع احتمال نمایی: (تابع توزیع پیوسته)

اگر λ نرخ وقوع رخداد بر واحد زمان باشد:

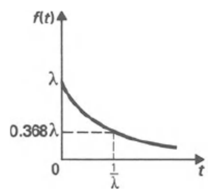
چگالی احتمال وقوع رخداد در زمان t : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

احتمال وقوع تا زمان t یا تابع احتمال تجمعی $= 1 - e^{-\lambda t}$ $\Longrightarrow F(t) = \int_0^t f(t)dt$

$$\Longrightarrow F(t) = \int_0^t f(t)dt = 1 - e^{-\lambda t}$$

ثابت می شود که:

$$E(x) = \sigma = \frac{1}{\lambda}$$



مثال۱۱: احتمال سالم بودن قطعه ای به مدت ۵۰ ساعت، ۹۰٪ است. اگر احتمال خرابی قطعه در زمان t از تابع نمایی پیروی کند احتمال سالم بودن قطعه به مدت ۱۰۰ ساعت چقدر است؟

تابع توزیع احتمال نرمال (تابع توزیع پیوسته)

برای یک متغیر تصادفی با مقدار متوسط η و انحراف استاندارد σ که دارای توزیع احتمال نرمال است:

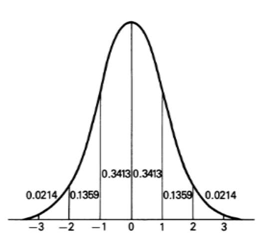
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- برای محاسبه احتمال وقوع متغیر میان دو مقدار مشخص، باید انتگرال تابع چگالی احتمال بین آن دو نقطه محاسبه شود که روش تحلیلی برای آن وجود ندارد و لذا باید از روش های عددی و یا جداول استاندارد استفاده کرد.

برای استفاده از جدول، منحنی یکتایی به نام منحنی استاندارد تعریف می شود:

$$z = \frac{x-\eta}{\sigma} \Longrightarrow f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

z یک متغیر تصادفی جدید با میانگین صفر و انحراف استاندارد ۱ است.



- مقدار عددی انتگرال ۰ تا z برای تابع چگالی احتمال استاندارد $f(z)$

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.0279	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.0438	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.1293	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.1591	0.16276	0.1664	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.2054	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.2224
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.2549
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.2673	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.2823	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.3665	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.379	0.381	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.4032	0.4049	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.4222	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.4452	0.4463	0.44738	0.44845	0.4495	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.4608	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.4732	0.47381	0.47441	0.475	0.47558	0.47615	0.4767
2	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.4803	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.483	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.485	0.48537	0.48574
2.2	0.4861	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.4884	0.4887	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.4901	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.4918	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.4943	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.4956	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.4972	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.4976	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.499

15

مثال۱۲: تعداد ۲۰۰۰ عدد لامپ با عمر میانگین ۱۰۰۰ ساعت روشنایی و انحراف استاندارد معادل ۲۰۰ ساعت موجود است.

الف: تعداد مورد انتظار لامپ های سوخته در ۷۰۰ ساعت اول چقدر است؟

ب: تعداد مورد انتظار لامپ های سوخته در فاصله زمانی ۹۰۰ تا ۱۳۰۰ ساعت چقدر است؟

ج: پس از چه مدت روشنایی، انتظار می رود که ۱۰٪ از لامپ ها بسوزند؟

16

مثال۱۳: ۸٪ از محصولات تولید شده‌ی یک شرکت، معیوب است. فرض می شود که می توان از توزیع نرمال به عنوان تقریب مناسب برای توزیع دوجمله ای استفاده کرد.

مطلوب است تعیین احتمال آنکه در یک نمونه برداری اتفاقی شامل ۵۰۰ عدد محصول از این شرکت، تعداد محصولات معیوب برابر باشد با:

الف: حداکثر ۵۰ عدد

ب: بین ۳۰ تا ۵۰ عدد

17

توزیع احتمال ویبال (تابع توزیع پیوسته)

$$f(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}} \quad , \quad \alpha, \beta > 0 \ , \ t \geq 0$$

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

- شکل این تابع ثابت نیست و به پارامترهای آن بستگی دارد. بنابراین می توان آن را با بسیاری از توزیع های مربوط به اطلاعات موردنظر تطبیق داد.

18