فصل سوم: معادلات حالت

- در روش معادلات حالت، مشتق متغیرهای حالت بر حسب آن متغیرها و منابع، بیان می شود.

$$\text{بردار حالت}:\ \underline{X}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix} \Longrightarrow \text{دستگاه معادلات حالت}:\ \frac{d\underline{X}}{dt}=\underline{f}(\underline{X},\underline{w},t)$$

- در حالتی که معادلات، خطی تغییرناپذیر با زمان باشند:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+\ a_{1n}x_n+b_{11}w_1(t)+\cdots+b_{1m}w_m(t)\\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+\ a_{2n}x_n+b_{21}w_1(t)+\cdots+b_{2m}w_m(t)\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+\ a_{nn}x_n+b_{n1}w_1(t)+\cdots+b_{nm}w_m(t)\end{cases} \Longrightarrow \frac{d\underline{X}}{dt}=A\underline{X}(t)+B\underline{w}(t)$$

- در روش معادلات حالت، یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به n معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می شود.

- روش معادلات حالت برای تحلیل مدارهای غیرخطی و یا تغییر پذیر با زمان مناسب است زیرا:
  - می توان معادلات توصیف کننده ی مدار را به سادگی با معادلات حالت بدست آورد.
  - امکان حل معادلات غیرخطی با استفاده از روش های عددی یا تقریبی وجود دارد.

- حل عددی (تقریبی) دستگاه معادلات حالت (به ازای ورودی صفر)

$$\frac{dX}{dt}=f(X,w,t)\,,\qquad w(t)=0\ \Longrightarrow\ \frac{dX}{dt}=f\big(X(t)\big)$$

$$\underline{X}(t_0+\Delta t)=\underline{X}(t_0)+\left.\frac{dX}{dt}\right|_{t_0}\Delta t+\cdots\ \approx\ \underline{X}(t_0)+f\left(\underline{X}(\mathrm{t}_0)\right)\Delta t$$

$$\underline{X}(t_0+2\Delta t)=\underline{X}(t_0+\Delta t)+\left.\frac{dX}{dt}\right|_{t_0+\Delta t}\Delta t+\cdots\ \approx\ \underline{X}(t_0+\Delta t)+f(\underline{X}(\mathrm{t}_0+\Delta t))\Delta t$$

$$\vdots$$

بنابراین مقادیر متغیرهای حالت به صورت نقطه به نقطه قابل تعیین خواهند بود.

- مسیر حالت، نحوه تغییرات متغیرهای حالت نسبت به هم (معمولاً به ازای ورودی صفر) را نشان می دهد.
  - سیستم پایدار: سیستمی است که به ازای هر شرط اولیه، مسیر حالت آن به صفر میل کند.
  - سیستم پایدار مجانبی: سیستمی است که به حالت پایدار غیر از مبدأ برسد.

- حل عددی دستگاه معادلات حالت برای سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI)

$$\frac{dX}{dt} = f(X, w, t) = A\underline{X}(t)$$

$$\Longrightarrow \underline{X}(t_0 + \Delta t) \approx \underline{X}(t_0) + A\underline{X}(t_0)\Delta t = (I + A\Delta t)\underline{X}(t_0)$$

$$\underline{X}(t_0 + 2\Delta t) \approx \underline{X}(t_0 + \Delta t) + A\underline{X}(t_0 + \Delta t)\Delta t = (I + A\Delta t)\underline{X}(t_0 + \Delta t) = (I + A\Delta t)^2\underline{X}(t_0)$$

$$\vdots$$

مثال ۱: حل تقریبی دستگاه معادلات حالت زیر:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X(t) \;, \qquad X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \Delta t = 0.1\ (sec)$$

$$I + A\Delta t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \Rightarrow X(0.1) = (I + A\Delta t)X(0) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow X(0.2) = (I + A\Delta t)X(0.1) = \begin{bmatrix} 1.18 \\ 1.47 \end{bmatrix},$$

$$,\quad X(0.3) = (I + A\Delta t)X(0.2) = \begin{bmatrix} 0.973 \\ 1.559 \end{bmatrix}, \qquad X(0.4) = (I + A\Delta t)X(0.3) = \begin{bmatrix} 0.837 \\ 1.598 \end{bmatrix},$$

$$\dots,\ X(0.7) = (I + A\Delta t)X(0.6) = \begin{bmatrix} 0.637 \\ 1.571 \end{bmatrix}$$

حل دقیق دستگاه معادلات حالت برای سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) با استفاده از تبدیل لاپلاس:

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) + Bw(t) \xRightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} SX(s) - X(0) = AX(s) + BW(s)$$

$$\Longrightarrow (SI - A)X(s) = BW(s) + X(0)$$

$$\Longrightarrow X(s) = (SI - A)^{-1}BW(s) + (SI - A)^{-1}X(0)$$

$$\Longrightarrow X(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{(SI - A)^{-1}BW(s)\}}_{\text{پاسخ حالت صفر}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{(SI - A)^{-1}\}}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} X(0)$$

اگر خروجی سیستم به صورت تابعی خطی از متغیرهای حالت بیان شده باشد:

$$y(t) = C^T X(t) + D^T w(t) \xRightarrow{\text{تبدیل لاپلاس}} Y(s) = C^T X(s) + D^T W(s)$$

$$= C^T\ [(SI - A)^{-1}BW(s) + (SI - A)^{-1}X(0)] + D^T W(s)$$

$$= \underbrace{[C^T(SI - A)^{-1}B + D^T]}_{\text{تابع شبکه}} W(s) + C^T(SI - A)^{-1}X(0)$$

مثال۲: محاسبه e^{AT} و $x(t)$ برای دستگاه معادلات مقابل:

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} X(t) \ , X(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

تعریف متغیرهای حالت:

- یک دسته از متغیرهای مدار را متغیرهای حالت گوییم هرگاه با داشتن مقدار آنها در $t=0$ (و منابع برای $t>0$)، بتوان مقدار آنها در $t>t_1$ را تعیین کرد و هر متغیر مدار را نیز بتوان بر حسب آنها نوشت.

- تعداد متغیرهای حالت، برابر است با مرتبه مدار (یعنی تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی که مستقل و فعال باشند)
  - مستقل بودن یعنی آنکه خازنها و منابع ولتاژ تشکیل حلقه ندهند و سلف ها و منابع جریان تشکیل کات ست ندهند و یا تزویج کامل وجود نداشته باشد
  - فعال بودن: یعنی عنصر مورد نظر، موازی با منبع ولتاژ و سری با منبع جریان نباشد.

- متغیرهای حالت در مدار، ولتاژ (یا بار) خازن ها و جریان (یا شار) سلف ها انتخاب می شوند. (در مدارهای غیرخطی، معمولاً بار و شار ترجیح داده می شوند)

- روش منظم برای نوشتن معادلات حالت

۱- انتخاب درخت مناسب (درختی با حداکثر تعداد خازن و منابع ولتاژ و حداقل تعداد سلف و منابع جریان)

۲- انتخاب متغیرهای حالت (ولتاژ یا بار خازن های مستقل (خازنهای روی شاخه های درخت) و جریان یا شار سلف های مستقل (سلف های روی لینک ها))

۳- نوشتن معادلات KCL برای کات ست های اساسی شاخه درخت های شامل خازن ها

۴- نوشتن معادلات KVL برای حلقه های اساسی لینک های شامل سلف ها

۵- حذف متغیرهای اضافی (متغیرهای غیرحالت و غیر منبع) و نوشتن آنها بر حسب متغیرهای حالت و منابع)

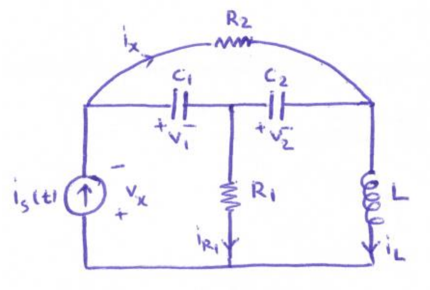
۶- نوشتن معادلات حالت به شکل ماتریسی

مثال ۳: در مدار زیر مطلوب است:

الف) نوشتن معادلات حالت به شکل ماتریسی با انتخاب متغیرهای حالت به صورت v_{c1} و v_{c2} و i_L

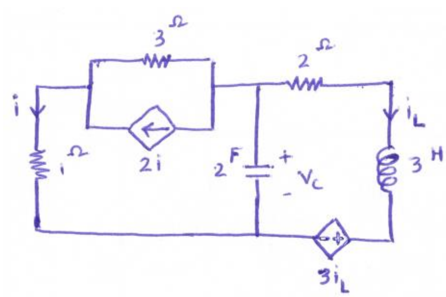
ب) نوشتن ولتاژ دو سر منبع جریان و جریان مقاومت برحسب متغیرهای حالت

ج) تکرار (الف)با انتخاب متغیرهای حالت به صورت q_{c1} و v_{c2} و φ_L



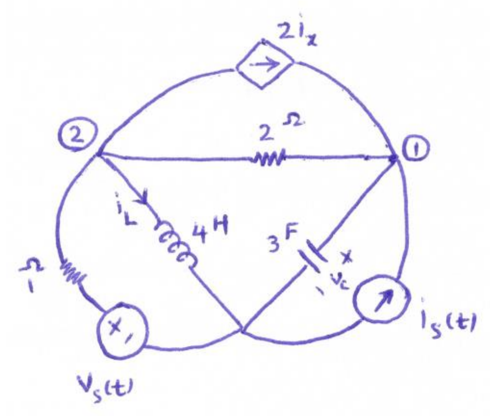
7

مثال ۴: در مدار زیر مطلوب است نوشتن معادلات حالت به شکل ماتریسی بر حسب i_L و v_c



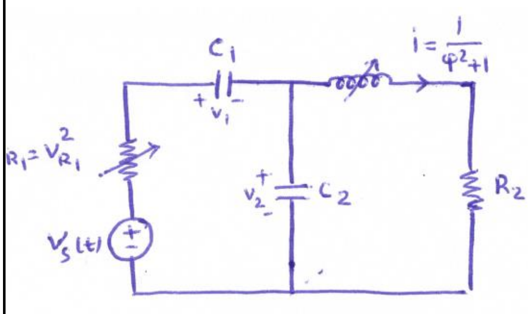
8

مثال ۵: در مدار زیر مطلوب است نوشتن معادلات حالت به شکل ماتریسی بر حسب i_L و v_c



9

مثال ۶: در مدار زیر مطلوب است تعیین معادلات حالت بر اساس $q(t)$ و $\varphi(t)$:

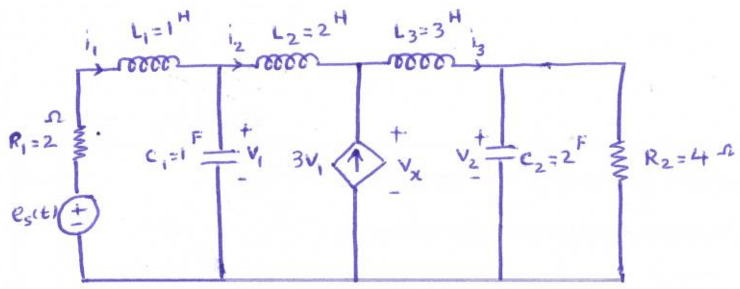


10

مثال ۷: در مدار زیر مطلوب است:

الف: تعیین معادلات حالت به شکل ماتریسی بر اساس ولتاژ خازن ها و جریان سلف ها

ب: ولتاژ دو سر منبع جریان وابسته بر حسب متغیرهای حالت و ورودی

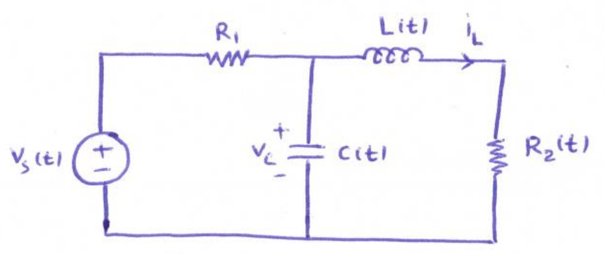


مثال ۸: در مدار خطی تغییرپذیر با زمان شکل زیر مطلوب است تعیین معادلات حالت به شکل ماتریسی:

الف: اگر متغیرهای حالت، q_c و φ_L باشند

ب: اگر متغیرهای حالت، v_c و i_L باشند

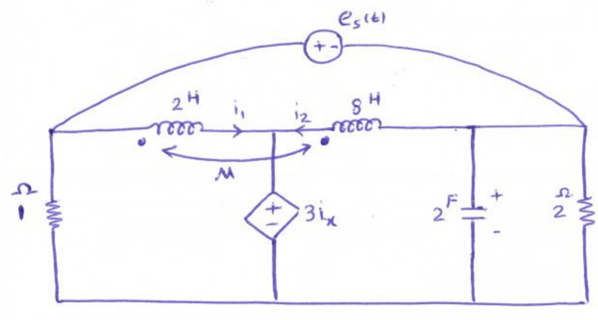
ج : اگر متغیرهای حالت، q_c و i_L (یا v_c و φ_L) باشند



مثال ۹: در مدار زیر مطلوب است تعیین معادلات حالت به شکل ماتریسی بر اساس ولتاژ خازن ها و جریان سلف ها:

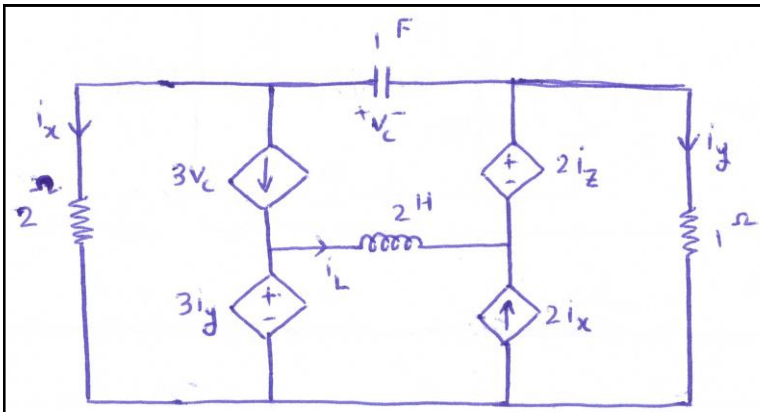
الف: وقتی تزویج M=2 H باشد.

ب: وقتی تزویج M=4 H باشد.



13

تمرین ۱: تعیین معادلات حالت و بررسی پایداری مدار زیر:



14