بخش ششم:
ارزیابی قابلیت اطمینان بر مبنای توزیع های احتمال

1

- **مفاهیم توزیع احتمال در ارزیابی قابلیت اطمینان**
- در قسمت های قبل جهت سادگی محاسبات، قابلیت اطمینان عناصر سیستم (R و Q) ثابت فرض شد. اما در عمل اگر تعدادی محصول حتی تحت شرایط یکسان نیز ساخته شده باشند باز هم زمان خرابی یکسان ندارند.
- زمان از کار افتادن سیستم و اجزای آن دارای یک تابع احتمال است. لذا آنچه می توان محاسبه کرد احتمال از کار افتادن اجزا "در یک بازه زمانی" است. بنابراین مقدار احتمال خرابی یا سالم بودن عناصر، تابعی از زمان خواهد بود.
- در صورت خراب شدن هر عضو، فاصله زمانی بین تعمیرات آن نیز از از تابع توزیع احتمال پیروی می کند. لذا زمان های خرابی و تعمیر، متغیرهای تصادفی هستند.

2

- تعاریف و اصطلاحات:

اگر در زمان t=0، قطعه (یا سیستم) سالم باشد، در اینصورت احتمال شکست در زمان t=0، صفر است و با افزایش زمان، احتمال از کار افتادن به سمت عدد یک میل می کند.

$$\begin{cases} Q(0) = 0 \\ Q(\infty) = 1 \end{cases} \rightarrow \quad Q\text{: تابعی از زمان}$$

$\rightarrow \quad Q(t)\text{:} \quad [0, t]$ تابع توزیع تجمعی احتمال از کار افتادن سیستم در فاصله زمانی

و

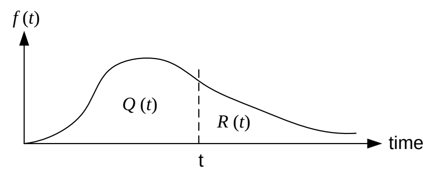
$R(t) = 1 - Q(t)$: تابع توزیع بقای سیستم

$$f(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{dR}{dt} \Longrightarrow$$ مشتق تابع توزیع احتمال تجمعی = تابع چگالی احتمال

یا

$$Q(t) = \int_0^t f(t)dt$$: احتمال وقوع خرابی تا زمان t

$$R(t) = 1 - Q(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = \int_t^\infty f(t)dt \quad ,$$



تعریف:

$\lambda(t)$ یا $failure\ rate$ یا آهنگ وقوع از کار افتادگی یا نرخ خرابی

$$= \frac{\text{تعداد از کارافتادگی در واحد زمان}}{\text{تعداد عضوهای در معرض از کار افتادن(باقیمانده)}}$$

N_0: تعداد عضوهای مورد آزمون

$N_s(t)$: تعداد عضوهای سالم تا زمان t

$N_f(t)$: تعداد عضوهای خراب شده تا زمان t

$$N_s(t)+N_f(t)=N_0$$

$$R(t) = \frac{N_s(t)}{N_0} = 1 - \frac{N_f(t)}{N_0} = 1 - Q(t)$$

$$f(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{dR}{dt} = \frac{1}{N_0} \cdot \frac{dN_f(t)}{dt}$$

- محاسبه $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{1}{N_s} \cdot \frac{dN_f(t)}{dt} = \frac{N_0}{N_s} \cdot \left(\frac{1}{N_0} \cdot \frac{dN_f(t)}{dt}\right) = \frac{1}{R(t)} \cdot f(t) = \frac{1}{R(t)} \cdot \left(-\frac{dR}{dt}\right) = \frac{-R'(t)}{R(t)}$$

بنابراین نرخ خرابی متناسب با تابع چگالی خرابی سیستم است به شرط آنکه تا زمان t، خرابی رخ ندهد.

- تعیین قابلیت اطمینان:

$$\lambda(t) = \frac{-1}{R(t)} \cdot \frac{dR}{dt} \Longrightarrow \int_0^t -\lambda(\tau)d\tau = \int_1^{R(t)} \frac{1}{R(t)} dR = \ln R(t)$$

$$\Longrightarrow R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}$$

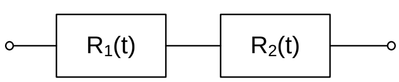
اگر λ مستقل از زمان باشد:

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$f(t) = -R'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{تابع توزیع نمایی}$$

البته در عمل، فرض مستقل بودن λ از زمان، در همه زمان ها برقرار نیست و معمولاً λ برای یک دوره زمانی خاص ثابت است.

- سیستم های سری:



$$R_{sys}(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) = e^{-\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau} \cdot e^{-\int_0^t \lambda_2(\tau)d\tau}$$

$$= e^{-\int_0^t (\lambda_1(\tau)+\lambda_2(\tau))d\tau}$$

$$\text{سیستم } n \text{ عضوی} \Longrightarrow R_{sys}(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp[-\int_0^t \lambda_i(\tau)d\tau]$$

رابطه فوق برای همه انواع توابع توزیع احتمال صادق است.

در حالت خاصی که تابع توزیع احتمالِ زیر سیستم ها نمایی باشد:

$$R_{sys}(t) = e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$\text{سیستم } n \text{ عضوی} \Longrightarrow R_{sys}(t) = e^{-\lambda t}, \qquad \lambda = \sum \lambda_i$$

بنابراین اگر اعضای سیستم دارای قابلیت اطمینان با توزیع نمایی باشند قابلیت اطمینان کل سیستم سری نیز یک تابع نمایی است که نرخ خرابی آن برابر با مجموع نرخ خرابی اعضا است.

مثال ۱: در یک نیروگاه، چند واحد تولیدی وجود دارد. در هریک از واحدها ۶ پمپ با نرخ خرابی 10^{-6} بار در ساعت، ۴ فن با نرخ خرابی $0/5\times10^{-6}$ بار در ساعت، ۳ هیتر با نرخ خرابی $0/2\times10^{-6}$ بار در ساعت و ۱۰ مشعل با نرخ خرابی 5×10^{-6} بار در ساعت وجود دارند. اگر همه سیستم های دیگر قابلیت اطمینان ۱۰۰٪ داشته باشند، و رابطه اجزای فوق، به صورت سری باشد، مطلوب است:

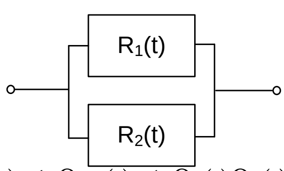
الف: تعیین نرخ خرابی معادل هر واحد تولیدی (اگر سالم بودن واحد معادل با تولید با ظرفیت کامل فرض شود)

ب: قابلیت اطمینان هر واحد برای ۱۰۰۰ ساعت کار

ج: قابلیت اطمینان هر واحد برای ۱۰.۰۰۰ ساعت کار

7

- سیستم های موازی:



$$R_{sys}(t)=1-Q_{sys}(t)=1-Q_1(t)Q_2(t)=1-(1-R_1(t))(1-R_2(t))=R_1(t)+R_2(t)-R_1(t)R_2(t)$$

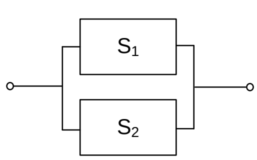
سیستم n عضوی $\Longrightarrow R_{sys}(t) = 1 - Q_{sys}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} Q_i(t)$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda_i(\tau)d\tau\right]\right)$$

اگر سیستم دو عضوی باشد و قابلیت اطمینان آنها دارای توزیع نمایی باشد:

$$R_{sys}(t) = e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

بنابراین در این حالت بر خلاف سیستم های سری، نمی توان نرخ خرابی سیستم را بر حسب نرخ خرابی اعضای آن بیان نمود.



8

مثال۲: قابلیت اطمینان سیستم زیر برای ۱۰۰۰ ساعت کار

سیستم های دارای عضو مازاد

در این سیستم ها که عملکرد بخشی از سیستم الزامی است، قبلاً قابلیت اطمینان سیستم را با استفاده از بسط زیر به دست می آوردیم:

$$(p+q)^n = 1$$

در حالت جدید که قابلیت اطمینان اجزا به صورت تابعی از زمان است:

$$(R(t)+Q(t))^n = 1$$

- اگر R(t) نمایی باشد:

$$(e^{-\lambda t} + (1-e^{-\lambda t}))^n = 1$$

بنابراین محاسبه قابلیت اطمینان مشابه قبل است و فقط باید R(t) و Q(t) را برای زمان مورد نظر محاسبه کرده و در رابطه قرار دهیم.

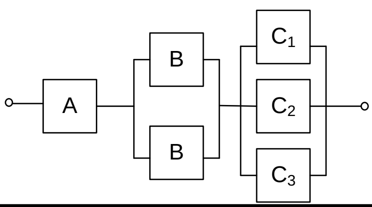
مثال ۳: سیستم با چهار عضو داریم که برای عملکرد صحیح سیستم، عملکرد حداقل دو عضو آن لازم است. اگر نرخ خرابی ۰/۱ (خرابی در سال) بوده و تابع توزیع نمایی برای هر عضو داشته باشیم، قابلیت اطمینان سیستم را برای نیم سال به دست آورید.

مثال ۴: تعیین قابلیت اطمینان سیستم مقابل برای دوره عملکرد ۵۰۰۰ ساعته

$\lambda_A=1\times10^{-6}$ f/hour و $\lambda_B=8\times10^{-6}$ f/hour

$\lambda_{c1}=5\times10^{-6}$ f/hour و $\lambda_{c2}=2\times10^{-6}$ f/hour

$\lambda_{c3}=10\times10^{-6}$ f/hour



9

مدت زمان میانگین تا خرابی (Mean Time to Failure)

- امید ریاضی زمان خرابی سیستم

$$f(t)\text{: تابع چگالی زمان خرابی} \Rightarrow MTTF = E(f(t))$$

$$= \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty t\cdot\frac{-dR(t)}{dt}dt = -\int_0^\infty tdR(t)$$

$$= -tR(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty R(t)dt$$

- سیستم های با عضوهای سری دارای توزیع نمایی

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)t}dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n}$$

- سیستم با دو عضو موازی دارای توزیع نمایی

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty \left[e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right]dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

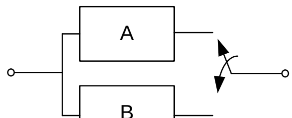
- سیستم با n عضو موازی دارای توزیع نمایی

$$MTTF = \left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\cdots\frac{1}{\lambda_n}\right) - \left(\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_1+\lambda_3}+\cdots+\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4}+\cdots\right)-\cdots$$

10

- سیستم های دارای عضو آماده به کار : نرخ خرابی در حالت آماده به کار، کمتر از نرخ خرابی در حالت کار است.
- الف: تغییر حالت بی نقص



اگر نرخ خرابی عضو B مشابه A باشد معادل آن است که یک سیستم یک عضوی داشته باشیم که یک بار از کار افتادگی در آن مجاز است. زیرا با از کار افتادن A، عضو B (بدون نقص در تبدیل وضعیت) فعال شده و سیستم به کار خود ادامه می دهد. ولی در صورت خرابی دوم، (یعنی خرابی B) سیستم از کار می افتد.

- توزیع پواسون: احتمال تعداد x خرابی در طی زمان t برای سیستم با نرخ خرابی λ:

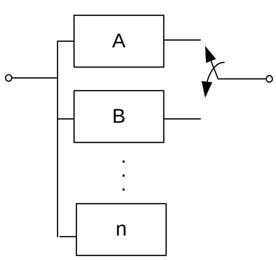
$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \implies \text{احتمال خرابی صفر عضو} = P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\text{احتمال خرابی یک عضو} = P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$R_{sys}(t) = P_0(t) + P_1(t) = (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$$

11

- اگر n عضو آماده به کار (تعمیرناپذیر) داشته باشیم:



$$\begin{aligned} P_0(t) &= e^{-\lambda t} \\ P_1(t) &= \lambda t e^{-\lambda t} \\ &\vdots \\ P_n(t) &= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \end{aligned} \implies R_{sys}(t) = P_0(t) + P_1(t) + \cdots + P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}$$

12

- میانگین زمان از کار افتادگی (برای سیستم با یک عضو آماده به کار)

$$MTTF \text{ یا } m = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty (1+\lambda t)e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$$

- برای سیستمی با n عضو آماده به کار:

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty \sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!} dt = \frac{n+1}{\lambda}$$

مثال ۵: الف: یک سیستم موازی دو عضو دارد که نرخ خرابی آنها ۰/۰۲ بار در ساعت است. قابلیت اطمینان سیستم را در طی ۱۰ ساعت تعیین کنید.

ب: اگر عضو دوم (مازاد) سیستم به صورت آماده کار باشد:

13

- ب: اگر تغییر وضعیت غیرایده آل (با احتمال نقص) باشد:

$$\text{قابلیت اطمینان وضعیت دهی} = P_s = \frac{\text{تعداد تغییر حالت های موفق}}{\text{تعداد کل دفعات تغییر حالت}}$$

$$\Longrightarrow \quad R_{sys}(t) = P_0(t) + P_s \cdot P_1(t) = (1 + P_s\lambda t)e^{-\lambda t}$$

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty (1+P_s\lambda t)e^{-\lambda t}dt = \frac{1+P_s}{\lambda}$$

- اگر تعداد عضوهای آماده به کار بیشتر باشد هر عضو جدید با احتمال P_s وارد می شود.

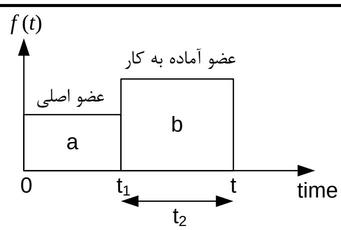
$$R_{sys}(t) = (1 + P_s\lambda t + (P_s)^2(\lambda t)^2 + \cdots)e^{-\lambda t}$$

- ج: احتمال نقص وضعیت دهنده در زمان کار: مشابه با سیستم سری تحلیل می شود

14

اجزای غیریکسان

- حالت اول: عضو b قبل از ورود دارای نرخ خرابی نباشد:



- برای محاسبه قابلیت اطمینان در حالت اجزای غیریکسان، حالت های سیستم را به پیشامدهای ناسازگار تقسیم می کنیم:
  - عضو a در بازه زمانی 0 تا t از کار نیفتد ($R_1(t)$)
  - عضو a در $t>t_1$ از کار بیفتد و عضو b در فاصله زمانی t_1 تا t از کار نیفتد. ($R_2(t)$)

$$R_1(t) = e^{-\lambda_a t}$$

$$R_2(t) = \int_{t_1=0}^{t} \left(\text{تابع چگالی احتمال از کار افتادگی عضو } a \text{ و از کار نیافتادن عضو } b\right) dt_1 =$$

$$\int_{t_1=0}^{t} \left(\text{احتمال از کار افتادن عضو } a \text{ در زمان } t_1\right)\left(\text{احتمال از کار نیافتادن عضو } b \text{ در بازه زمانی } t - t_1\right) dt_1$$

$$= \int_{t_1=0}^{t} (\lambda_a e^{-\lambda_a t_1}) \times (e^{-\lambda_b (t-t_1)}) dt_1 = \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a}[e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}]$$

$$\Rightarrow \quad R(t) = R_1(t) + R_2(t) = e^{-\lambda_a t} + \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a}[e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}]$$

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt = \frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b}$$

اگر قابلیت اطمینان وضعیت دهنده در زمان تغییر وضعیت نیز ۱۰۰٪ نباشد (تغییر حالت با احتمال P_s انجام شود)

$$\Rightarrow \quad R(t) = R_1(t) + R_2(t) = e^{-\lambda_a t} + \frac{P_s \lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a}[e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}]$$

- حالت دوم: عضو b قبل از ورود نیز دارای نرخ خرابی است:

λ_1: نرخ خرابی عضو اصلی (a)

λ_2: نرخ خرابی عضو b در حالت عملکرد

λ_3: نرخ خرابی عضو b در حالت آماده به کار

رخدادهای ناسازگار:

- عضو a در بازه زمانی 0 تا t از کار نیفتد ($R_1(t)$)
- عضو a در $t>t_1$ از کار بیفتد و عضو b از زمان 0 تا t_1 (تا زمان t_1) از کار نیفتاده باشد و در فاصله زمانی t_1 تا t نیز از کار نیفتد. ($R_2(t)$)

$$R_1(t) = e^{-\lambda_1 t}$$

$$R_2(t) = \int_{t_1=0}^{t} (\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}) \times (e^{-\lambda_3 t_1}) \times (e^{-\lambda_2 (t-t_1)}) dt_1$$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_3)}\left[e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} - e^{-\lambda_2 t}\right]$$

$$\Rightarrow \quad R(t) = R_1(t) + R_2(t) = e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_3)}\left[e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} - e^{-\lambda_2 t}\right]$$

مثال ۶: محاسبه قابلیت اطمینان سیستمی متشکل از دو عضو موازی و یک عضو آماده کار که در صورت از کار افتادن هردو عضو موازی، فعال می شود.

- تأثیر قطعات یدکی (Spare Components) یک تعداد عضو مشابه همراه با تعدادی عضو یدکی که در صورت خرابی هریک از عضوهای اصلی جایگزین آنها می شوند (بنابراین مشابه سیستم آماده به کار است) در این حالت دو فرض را در نظر می گیریم:
  - زمان جایگزینی (نصب) عضوهای یدکی کوتاه است به طوری که در طول این مدت سیستم را نتوان از کار افتاده فرض کرد.
  - عضوهای معیوب تعمیر نمی شوند (اگر تعمیرپذیر باشند باید از روش مارکوف استفاده شود.)
- اگر N عضو اصلی (سری) و n عضو یدکی داشته باشیم، با وقوع n از کار افتادگی، سیستم هنوز دارای عملکرد صحیح است ولی با وقوع n+1 امین از کارافتادگی، سیستم دچار شکست می شود.

$$\text{سیستم } N\text{عضوی} \implies \text{نرخ خرابی درسیستم} = \sum \lambda_i = N\lambda$$

$$R(t) = P_0(t) + P_1(t) + \cdots + P_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(N\lambda t)^i e^{-N\lambda t}}{i!}$$

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty \sum_{i=0}^{n} \frac{(N\lambda t)^i e^{-N\lambda t}}{i!} dt = \frac{n+1}{N\lambda}$$

لذا MTTF افزایش می یابد.

- توجه: اگر قبل از زمان MTTF سیستم وارد مرحله فرسایش شود دیگر مدل توزیع نمایی قابل استفاده نیست.

17

تأثیر تعمیرات در قابلیت اطمینان اجزا

- انواع تعمیرات:
  - تعمیرات پیشگیرانه (Preventive Maintenance): به منظور حفظ صحت عملکرد سیستم و تأمین قابلیت اطمینان مورد نیاز و از طریق انجام بازرسی های دوره ای، تمیزکاری قطعات، روغنکاری و ... انجام می شود.
  - تعمیرات اصلاحی (Corrective Maintenance): در صورت مشاهده خرابی در عملکرد سیستم انجام شده و هدف آن، بازگرداندن سریع سیستم به شرایط مطلوب برای عملکرد است.
- در تعمیرات پیشگیرانه، فاصله زمانی معینی برای انجام بازرسی های دوره ای مطرح است. اما زمان تعمیرات اصلاحی بستگی به نرخ خرابی عضوهای سیستم دارد:

$$\text{تعداد دفعات تعمیرات حادثه ای در مدت زمان } t = \frac{t}{m} \implies m \text{ یا } MTTF \text{ میانگین زمان از کار افتادن}$$

- قبلاً دیده شد که با کاربرد عضوهای مازاد، قابلیت اطمینان کلی سیستم افزایش می یابد. حال اگر با برنامه تعمیرات پیشگیرانه عضوهای مازادِ از کار افتاده تعمیر یا تعویض شوند، بهبود بیشتری در قابلیت اطمینان ایجاد می شود و MTTF افزایش می یابد.

18

مثال ۷: مقایسه سه طرح (از نظر قابلیت اطمینان و تعداد فعالیت های تعمیراتی) برای استفاده از یک سیستم که دارای ۱۰۰۰ مأموریت ۱۰ ساعته است.

الف: سیستم با یک عضو با نرخ خرابی f/hr ۰/۰۱

ب: سیستم با دو عضو موازی با نرخ خرابی f/hr ۰/۰۱ و با انجام تعمیرات پیشگیرانه در شروع هر مأموریت، (قطعه در صورت خرابی، تعویض می شود)

ج: سیستم با دو عضو موازی با نرخ خرابی f/hr ۰/۰۱ بدون انجام تعمیرات پیشگیرانه (در صورت خرابی سیستم، تعمیرات اصلاحی انجام می شوند)

تمرین: حل قسمت های ب و ج در مثال ۷ در صورتی که سیستم دارای سه عضو موازی باشد.